トレミーの定理

プトレマイオスは，その著書『アルマゲスト』で，トレミー（プトレマイオス）の定理を，次のように記述している。

> 1つの円に内接した任意の四辺形の対角線により囲まれた長方形は，対辺の対により囲まれた長方形の和に等しい。

古代ギリシャでは，数を線分の長さとして解釈し，2数の積は与えられた数を2辺の長さとする長方形の面積として解釈した。ここでの「… により囲まれた長方形」とは，「… の積」を意味している。この命題を現代風に書けば，先に示した通り，

> 1つの円に内接する1つの四辺形で，対角線の長さの積は，対辺の長さの積の和に等しい。

となる。すなわち，円に内接する四辺形 ABCD において

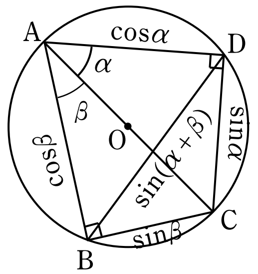
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

が成立する。この定理において，四辺形 ABCD が長方形の場合を考えると，

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

となる。すなわち，ピタゴラスの定理が得られる。

次に，右図のような対角線 AC の長さが 1 で，AC を直径とする円に内接する四角形 ABCD を考える。



ここで，$\angle CAD = \alpha$，$\angle CAB = \beta$ とすると，AC=1，$\angle ABC = \angle ADC = 90°$ より，

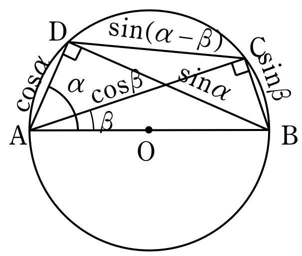
$AB = \cos\beta,\ BC = \sin\beta,\ CD = \sin\alpha,\ DA = \cos\alpha$

であり，正弦定理より，$BD = \sin(\alpha+\beta)$

である。ここで，トレミーの定理より，

$$1 \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

となり，加法定理が成立する。また，AB=1 で AB を直径とする円に内接する四角形 ABCD において，$\angle BAD = \alpha$，$\angle BAC = \beta$ とすると，同様に



$$1 \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

が成立することがわかる。

トレミーの定理は，それほど有名ではないがすばらしい定理である。